多層地盤における杭の「平均的」水平地盤反力係数に関する理論的検討

THEORETICAL STUDY OF THE AVERAGE COEFFICIENT OF LATERAL SUBGRADE REACTION FOR PILES IN MULTI-LAYERED SOIL

成田 修英*1
Nobuhide NARITA

In this paper, I propose an equivalent homogeneous factor β (hereinafter, called "$\overline{\beta}$") to express lateral subgrade reaction for piles in multi-layered soil (where β is the characteristic value β of Chang's formula). I formulated $\overline{\beta}$ as the elastic energy balance condition of the total length of a pile. The $\overline{\beta}$ can be calculated with a simple iterative calculation. Furthermore, I verified the characteristics of $\overline{\beta}$ by numerical analysis. In this verification, I verified convergence of the iterative calculation method for $\overline{\beta}$ and compared the pile displacement calculated with $\overline{\beta}$ to the displacement of beams in an inhomogeneous Winkler foundation model. As a result, I obtained the following information.

1. This $\overline{\beta}$ can be calculated by the proposed iterative calculation method.
2. In ordinary soil conditions, the pile displacement calculated with $\overline{\beta}$ generally agreed with the displacement of beams in inhomogeneous Winkler foundation model.

Keywords *: Coefficient of Lateral Subgrade Reaction, Multi-layered Soil, Chang's formula,*
水平地盤反力係数，多層地盤，Chang の式

1. はじめに

杭の地盤反力を Winkler ばねで表現するモデル（以下,「梁ばねモデル」と呼ぶ）は，地中での杭の挙動に関する実用的な計算方法として有用である．特に，Chang の示した一様地盤における無限長杭の杭頭水平載荷に対する解[1]（以下,「Chang の式」と呼ぶ）は，単純な閉じた形の式で表されており，計算の容易さ，また計算結果の見通しの立て易さの点で，実用性が高い．

Chang の式は，単一の特性値を用いて杭の変位分布，地盤反力分布，断面力分布などを表現できるため，杭の設計諸元と計算結果との因果関係を把握し易く，特に杭の設計初期段階の概略的な検討において威力を発揮する．現在の計算機環境では，多層地盤の梁ばねモデルの計算や，それよりさらに厳密なモデルの計算も，容易に実施できるが，それら厳密な計算方法も，杭の設計諸元と計算結果との因果関係の把握し易さという点では，Chang の式におよばない．そのため，Chang の式は，今なお有用な実用計算法として一定の地位を保っている（2019 年に改定された日本建築学会発行の最新版の指針[2]でも，4 ページに渡って解説が掲載されている）．

Chang の式は，一様地盤における解であるため，実地盤（多層地盤）への適用に際しては，注意が必要である．杭頭水平載荷に対する杭の地盤反力は，深度に対して指数関数的に減少するので，地盤反力の集中する杭頭付近の地盤が一様と見なせるような地盤条件であれば, Chang の式と多層地盤の梁ばねモデルの解は一致するが，そうでない場合には誤差が生じる．そのような場合に，Chang の式の誤差を最小化できる多層地盤の平均的なパラメータを求めることができれば便利である．そこで本報告では，Chang の式を多層地盤に適用する際の誤差評価の方法と，評価対象となる多層地盤と杭の諸元から，Chang の式に代入するための平均的なパラメータを決定するための方法について検討した結果について述べる（以下，このような平均的な地盤を「等価一様地盤」と呼ぶ）．

なお，杭頭鉛直載荷に対する等価一様地盤の考察は付録１に記載している．

2. 理論

2.1 検討対象とする地盤と杭の条件

図１に，検討対象とする地盤と杭の条件を示す．同図の通り，n 層地盤に無限長の杭が打設されているものとして，梁ばねモデルで検討を行う．このときi層における杭の変位を$u_i(z)$とすると，i層における杭のせん断力増分と地盤反力の関係は次式の通りになる．

$$EI_i \frac{d^4 u_i(z)}{dz^4} + k_{hi} B_i u_i(z) = 0 \tag{1}$$

(1)式の微分方程式の解が，多層地盤における水平載荷の梁ばねモデルの厳密解である．

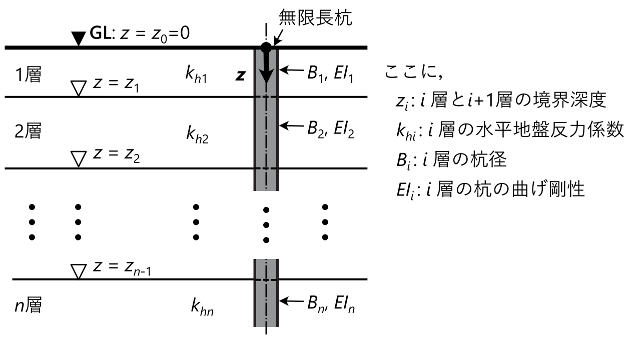


図１　検討対象とする地盤と杭

2.2 多層地盤における Chang の式の誤差

Chang の式と多層地盤の解（(1)式の解）では，あらゆる点で食い違いが生じるため，無数の誤差評価法が考えられるが，ここでは杭全長における弾性エネルギーの収支に着目し，以下の通りに誤差関

*1　戸田建設㈱技術開発センター　修士（工学）　　Technology Development Center, TODA CORPORATION, M.Eng.

数を定義する．そうすると，誤差関数を最小化するChangの式のパラメータとして，等価一様地盤のパラメータも定まる．

(1) 杭全長における弾性エネルギーの収支

(1)式より，梁ばねモデルにおける弾性エネルギーの収支の条件式が容易に導ける．まず，(1)式の両辺に$u_i(z)/2$をかけると次式が求まる．

$$\frac{1}{2}EI_i\frac{d^4u_i(z)}{dz^4}u_i(z)+\frac{1}{2}k_{hi}B_iu_i^2(z)=0 \tag{2}$$

(2)式は任意の深度で成り立つので，(2)式の左辺を杭全長に渡って積分してもやはり成り立つ（次式）．

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}EI_i\frac{d^4u_i(z)}{dz^4}u_i(z)+\frac{1}{2}k_{hi}B_iu_i^2(z)\right)dz=0 \tag{3}$$

ここで(3)式左辺の被積分関数に着目すると，1項目は杭に蓄えられる弾性エネルギー，2項目は外力（地盤反力）が杭に成す仕事を表していることが分かる．したがって，(3)式は「杭に蓄えられるエネルギーと外力の成す仕事の収支は，杭全長で考えると釣合う（足すとゼロになる）」ことを示した式となっている（(2)式は，「(杭全長で考えなくても）各深度でもエネルギーの収支が釣合う」ことを示している）．

(2) 弾性エネルギーの収支に着目したChangの式の誤差

(3)式を元に多層地盤におけるChangの式の誤差関数を定義する．まずChangの式による杭の変位を$u_c(\beta,z)$とおき，(3)式の右辺に$u_i(z)$の代わりに$u_c(\beta,z)$を代入した関数を$\varepsilon(\beta)$とおく（次式）．ここにβはChang式の特性値で，水平地盤反力係数をk_h, 杭径をB，杭の曲げ剛性をEIとすると，$\beta\coloneqq\sqrt[4]{k_hB/4EI}$である．

$$\varepsilon(\beta)\coloneqq\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}EI_i\frac{d^4u_c(\beta,z)}{dz^4}u_c(\beta,z)+\frac{1}{2}k_{hi}B_iu_c^2(\beta,z)\right)dz \tag{4}$$

ここに，$A\coloneqq B$は記号Aを左辺の数式Bの内容で定義することを表す．

$u_c(\beta,z)$と$u_i(z)$は一致しないので，一般に$\varepsilon(\beta)\neq0$である．$\varepsilon(\beta)$の値は，杭の変位として厳密解でなく$u_c(\beta,z)$を用いることにより生じるエネルギー収支の不釣り合い（誤差）を表している．

2.3 等価一様地盤におけるChangの式の特性値

(1) 等価一様βの定義と条件式

上で定義した誤差関数$\varepsilon(\beta)$の値をゼロにするような特性値βを求めることが可能である．このようなβを，等価一様地盤におけるβ，等価一様βと呼び，以下，記号$\overline{\beta}$で記す．$\varepsilon(\overline{\beta})=0$を満たすような$\overline{\beta}$が必ず存在することの証明については付録2に示す（$\overline{\beta}$の存在証明については，良い物理的解釈があれば本文に記載したが，数学的な証明しか思いつかなかったので，付録とした）．

以下，(4)式を整理し$\overline{\beta}$の条件式を導く．まずChangの式の性質より，次式が成り立つ．

$$\frac{d^4u_c(\beta,z)}{dz^4}=-4\beta^4u_c(\beta,z) \tag{5}$$

これを(4)式に代入して次式が導ける．

$$\varepsilon(\beta)=\int_0^\infty\left(-2EI_i\beta^4+\frac{1}{2}k_{hi}B_i\right)u_c^2(\beta,z)dz \tag{6}$$

さらに(6)式に$\varepsilon(\overline{\beta})=0$を代入して整理すると，$\overline{\beta}$に関する以下のような条件式が得られる．

$$\overline{\beta}^4=\frac{\sum_{i=1}^n\left(\frac{k_{hi}B_i}{4EI_i}\int_{z_{i-1}}^{z_i}u_c^2(\overline{\beta},z)dz\right)}{\int_0^\infty u_c^2(\overline{\beta},z)dz} \tag{7}$$

以下，表記の簡略化のため，(7)式の右辺の関数を$f(\beta)$と記す（次式）．

$$f(\beta)\coloneqq\frac{\sum_{i=1}^n\left(\frac{k_{hi}B_i}{4EI_i}\int_{z_{i-1}}^{z_i}u_c^2(\beta,z)dz\right)}{\int_0^\infty u_c^2(\beta,z)dz} \tag{8}$$

(7)式の条件を満たす$\overline{\beta}$は，次の反復計算の収束値として数値的に求めることが出来る．

$$\hat{\beta}_{j+1}^4=f(\hat{\beta}_j) \tag{9}$$

ここに，$\hat{\beta}_j$はβの想定値$\hat{\beta}$に関する反復計算のj番目の値を表す．

$\hat{\beta}$の初期値$\hat{\beta}_1$には1層目の諸元（図1参照）に対応したChangの式の特性値である次式を用いれば良い．

$$\hat{\beta}_1=\sqrt[4]{\frac{k_{h1}B_1}{4EI_1}} \tag{10}$$

(2) 関数$f(\beta)$の具体的な形

反復計算により$\overline{\beta}$を求めるためには，関数$f(\beta)$が数値計算のできる具体的な形で定まっている必要がある．これは$f(\beta)$の定義式（(8)式）にChangの式を代入して計算を実行すれば定まる．以下，杭頭自由条件と杭頭固定（回転拘束）条件でそれぞれ$f(\beta)$の具体形を示す．

杭頭自由条件では，$\int u_c^2(\beta,z)dz$は，次のようになる（積分定数は省略）．

$$\int u_c^2(\beta,z)dz=-\frac{1}{8\beta}\left(\frac{P}{2EI\beta^3}\right)\mathrm{e}^{-2\beta z}\left(2+\sqrt{2}\cos\left(2\beta z+\frac{\pi}{4}\right)\right) \tag{11}$$

ここに，Pは杭頭荷重を表す．

これを用いて，$f(\beta)$の具体形が次の通りに定まる．

$$f(\beta)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{k_{hi}B_i}{4EI_i}\left(g_1(\beta,z_{i-1})-g_1(\beta,z_i)\right) & (\beta\neq0)\\ \dfrac{k_{hn}B_n}{4EI_n} & (\beta=0)\end{cases} \tag{12}$$

$$g_1(\beta,z)\coloneqq\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2\beta z}\left(2+\sqrt{2}\cos\left(2\beta z+\frac{\pi}{4}\right)\right) \tag{13}$$

杭頭固定条件では，$\int u_c^2(\beta,z)dz$は，次のようになる（積分定数は省略）．

$$\int u_c^2(\beta,z)dz=-\frac{1}{4\beta}\left(\frac{P}{4EI\beta^3}\right)\mathrm{e}^{-2\beta z}\left(2+\sqrt{2}\sin\left(2\beta z+\frac{\pi}{4}\right)\right) \tag{14}$$

これを用いて，$f(\beta)$の具体形が次の通りに定まる．

$$f(\beta)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{k_{hi}B_i}{4EI_i}\left(g_2(\beta,z_{i-1})-g_2(\beta,z_i)\right) & (\beta\neq0)\\ \dfrac{k_{hn}B_n}{4EI_n} & (\beta=0)\end{cases} \tag{15}$$

$$g_2(\beta,z)\coloneqq\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2\beta z}\left(2+\sqrt{2}\sin\left(2\beta z+\frac{\pi}{4}\right)\right) \tag{16}$$

βが極端に大きい（杭の曲げ剛性に対し地盤反力係数が極端に大きい）場合，$f(\beta)$は杭頭自由条件，固定条件ともに$k_{h1}B_1/4EI_1$に漸近する．このことは，$f(\beta)$の具体形の式より，容易に確かめることができる．まず，$g_1(\beta,z), g_2(\beta,z)$ともに$e^{-2\beta z}$のオーダの関数なので，次式が成り立つ．

$$g_1(\beta\to\infty,z_i)\simeq g_2(\beta\to\infty,z_i)\simeq 0\quad(i\geq 1)\tag{17}$$

一方，(13)，(16)式より次式も成り立つ．

$$g_1(\beta,0)=g_2(\beta,0)=1\tag{18}$$

(17)，(18)式より，杭頭自由条件，固定条件ともに次式が成り立つ．

$$f(\beta\to\infty)\simeq\frac{k_{h1}B_1}{4EI_1}\tag{19}$$

(3) 等価一様βの反復計算の収束性

$\bar{\beta}$は，図２に示すような$y=\beta^4$のグラフと$y=f(\beta)$のグラフの交点と考えることができる．同図における$y=f(\beta)$のグラフは，$f(\beta)$の具体形（(12),(15)式）と$f(\beta\to\infty)$に関する考察より想定される典型的なパターンを示したものである．同図(a)は標準的な地盤条件におけるグラフを示しており，同図(b)はかなり稀なケースと考えられるが，例えば表層地盤改良した地盤の改良体を貫通して細径の杭が打設されているような条件でのパターンを示している．どちらのパターンでも，$\hat{\beta}$は，同図の「$\hat{\beta}$の収束の軌跡」にあるような軌跡を描いて$\bar{\beta}$に収束する．この収束性の厳密な証明は，付録３に示す．

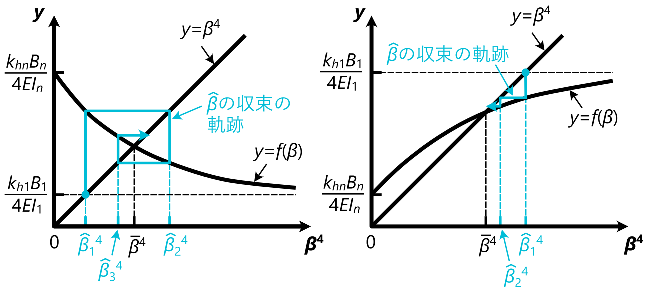


図２　β^4，$f(\beta)$のグラフと反復計算による$\hat{\beta}$収束の軌跡の模式図

3. 等価一様βの適用性検証

3.1 多層地盤に打設された杭の等価一様βを計算する手順

２章に全て示した内容ではあるが，２章の記載は理論の説明を主眼に置いており，具体的な$\bar{\beta}$の計算手順については，あまり整理された記載になっていないので，ここで簡潔にまとめる．

まず反復計算の準備として，杭と地盤の諸元から各層の水平地盤反力係数k_{hi}を算出し，$k_{hi}B_i/4EI_i$を求めておく．また$\hat{\beta}$の収束判定方法を決めておく．$\hat{\beta}$の収束判定は，例えば「次式のように定義できる収束率R_jが一定値（例えば 1/100）以下であるなら収束したと見なす」などとして良い．

$$R_j:=\frac{|\hat{\beta}_{j+1}-\hat{\beta}_j|}{\hat{\beta}_j}\tag{20}$$

以上準備をした上で，図３のフローに従って反復計算を行えば，収束判定において設定した所要の精度の$\bar{\beta}$が求まる．

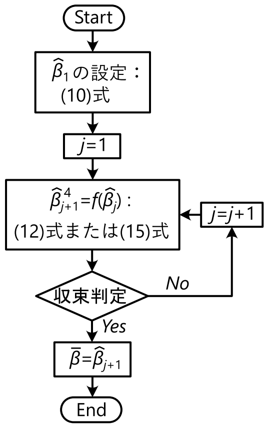


図３　等価一様βの計算フロー

3.2 等価一様βの数値的検証

３ケースの模擬地盤を設定し，表１の諸元を持つ杭に対して杭頭自由の条件と杭頭固定の条件それぞれで$\bar{\beta}$の計算を実施，反復計算の収束性の確認と多層地盤の梁ばねモデルの厳密解との比較を行う．簡単のため，杭は表１の値で全層均質とする．また，等価一様地盤における Chang の式と多層地盤の梁ばねモデルの解との比較は，杭頭載荷 1kN 時の杭の変位分布にて行う．

表１　検証計算における杭の諸元

杭径 ***B*** (m)	曲げ剛性 ***EI*** (kN・m^2)	杭長
1	1.03×10^6	無限

模擬地盤は各層ポアソン比ν_iとせん断波速度V_{si}および地盤の質量密度ρを設定し，以下の式により，地盤の弾性係数E_{si}を設定する．ただし，地盤の質量密度は簡単のため，全層一律$\rho=1.8$t/m^{3}とする．

$$G_{si}=\rho V_{si}^2\tag{21}$$

$$E_{si}=2(1+\nu_{si})G_{si}\tag{22}$$

ここに，G_{si}はi層のせん断弾性係数を表す．

求まったE_{si}を Francis の式[3]（次式）に代入すれば，水平地盤反力係数が求まり，この値と表１の杭諸元を用いて，梁ばねモデルの計算が実施できる．

$$k_{hi}B=\frac{1.3E_{si}}{1-\nu_i^2}\left(\frac{E_{si}B^4}{EI}\right)^{1/12}\tag{23}$$

また，検証計算では収束状況の確認のため，反復計算の各ステップにおける$\hat{\beta}$の値から逆算した平均的なせん断波速度（以下，$\hat{V}_s$と記す）の出力も行う（$\hat{\beta}$の数値よりも，それを基に逆算した$\hat{V}_s$の方が，状況の直感的把握が容易なので）．$\hat{V}_s$の計算は，(21)~(23)式の手順を逆に辿って以下の通りに行う．まずβの定義式より，平均的な地盤反力係数（かける杭径）$\widehat{k_hB}$が逆算できる．

$$\widehat{k_hB}=4EI\hat{\beta}^4\tag{24}$$

(24)式の結果を Francis の式に代入して次式のように整理すると，平均的な地盤の変形係数$\hat{E}_s$が求まる．この際，平均的な地盤のポアソン比$\hat{\nu}$が必要となるが，ここでは簡単のため$\hat{\nu}=0.3$を仮定する．

$$\hat{E}_s = \left(\frac{EI}{B^4}\right)^{\frac{1}{13}}\left(\frac{\widehat{k_h B}(1-\hat{\nu}^2)}{1.3}\right)^{\frac{12}{13}} \tag{25}$$

$\hat{V}_s$と$\hat{E}_s$の間には，その定義より，次の関係が成り立つので，

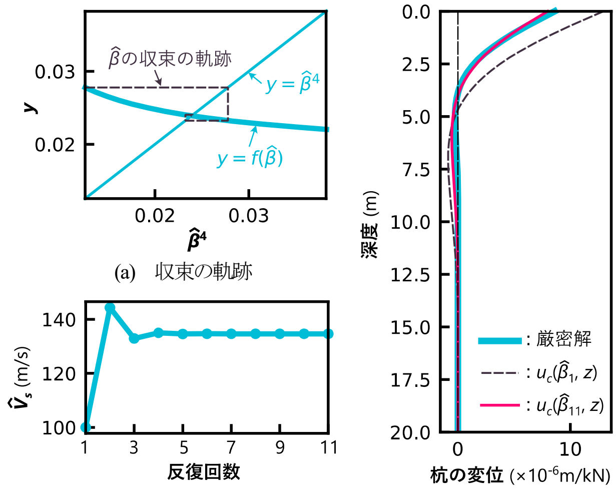
$$\hat{V}_s = \sqrt{\frac{\hat{E}_s}{2(1+\hat{\nu})\rho}} \tag{26}$$

この関係と(24),(25)式を組み合わせることにより，$\hat{\beta}$から$\hat{V}_s$が求まる．

(1) 模擬地盤ケース１

表２　ケース１の地盤諸元

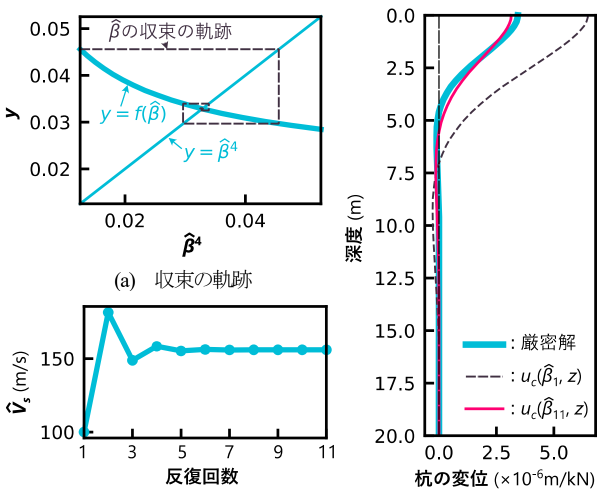
層番号	下端深度 (m)	V_{si} (m/s)	ν_i
1	1	100	0.30
2	3	150	0.48
3	10	300	0.48
4	無限	500	0.48



(a)　収束の軌跡

(b)　平均的V_sの収束状況　　(c)　杭の変位の比較

図４　ケース１　杭頭自由条件計算結果



(a)　収束の軌跡

(b)　平均的V_sの収束状況　　(c)　杭の変位の比較

図５　ケース１　杭頭固定条件計算結果

ケース１は標準的な地盤条件を想定している．表２が地盤の諸元，図４が杭頭自由条件の結果，図５が杭頭固定条件の結果である．図４，５(a)より，このような地盤条件では，$\hat{\beta}$の収束の軌跡は図２(a)のパターンをとることが確認できる．また図４，５(b)より，反復回数５~６回程度で値が収束すること，収束値には２層目以深のV_sも反映されていることが分かる．$\hat{V}_s$の収束値については，杭頭自由条件（図４(b)）よりも杭頭固定条件（図５(b)）の方が大きいが，これは，杭頭固定条件の方がより深い地層まで変位がおよび，より深い地層のV_sを反映することによる．図４，５(c)を見ると，１層目の物性を用いた$\hat{\beta}_1$による Chang の式の変位は，厳密解（多層地盤の梁ばねモデルの解）と整合しないが，十分に収束した値である$\hat{\beta}_{11}$を用いた Chang の式の変位は，厳密解に概ね整合していることが確認できる．

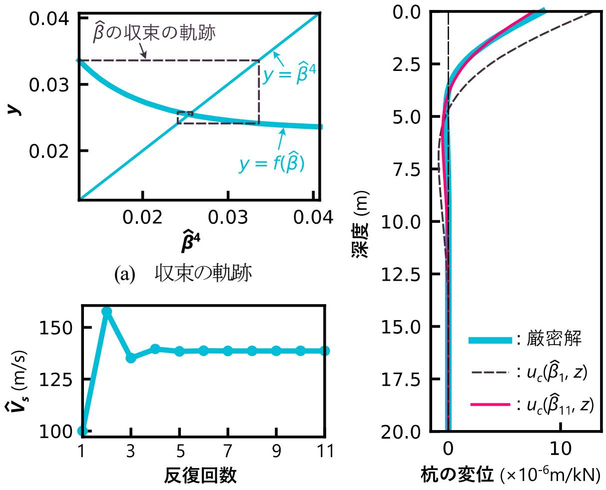
ただし，$\hat{\beta}$が高い精度で収束しても，それを用いた Chang の式の変位解が$\hat{\beta}$の収束精度と同じ精度で厳密解に整合するわけでは無いことには，注意が必要である．実際，図４，５(c)を確認すると，厳密解と$u_c(\hat{\beta}_{11}, z)$は，概ね整合してはいるものの，目視で確認できるレベルの誤差がある．これは，反復計算の回数が足りないのでは無く，多層地盤内の杭の挙動を単一の平均的なパラメータ$\overline{\beta}$で表現することの限界によるものである．$\overline{\beta}$を用いた Chang の式の解は杭全長でのエネルギー収支の釣合いは満足するが，各深度における力の釣合いは満足しない．一方，多層地盤の厳密解は各深度の力の釣合いも満足する（杭全長でのエネルギー的釣合いも当然満足する）ので，そこに差異が生じる．この点は，$\overline{\beta}$を用いて Chang の式で多層地盤の杭の挙動を表現することの限界として認識しておく必要がある．

(2) 模擬地盤ケース２

ケース２は堅固な中間支持層（3 層目）のある地盤条件を想定している．表３が地盤の諸元，図６が杭頭自由条件の結果，図７が杭頭固定条件の結果である．3 層目は，中間支持層としては浅すぎてやや現実味が無いが，杭頭に近い地層の方が$\overline{\beta}$への影響が強く，この種の地盤条件における傾向を捉え易くなるため，中間支持層のある場合の極端な例として設定している．図６,７より，ケース２の傾向はケース１と大差ない．ただし，杭頭固定条件ではケース１よりも収束性がやや悪い傾向がある（図５(a), (b)と図７(a), (b)の比較より）．これが中間支持層のある地盤の特徴だと考えられる．杭頭自由条件では，収束性の悪化は見られないが，これはケース１の結果の考察でも述べた通り，杭頭自由条件では杭頭固定条件よりも杭の変位が浅い部分に集中する傾向があるため，この場合，杭頭自由条件では中間支持層の寄与が小さかった（1，2 層目の寄与が卓越した）ことによると考えられる．

表３　ケース２の地盤諸元

層番号	下端深度 (m)	V_{si} (m/s)	ν_i
1	1	100	0.30
2	3	150	0.48
3	5	500	0.48
4	10	300	0.48
5	無限	500	0.48

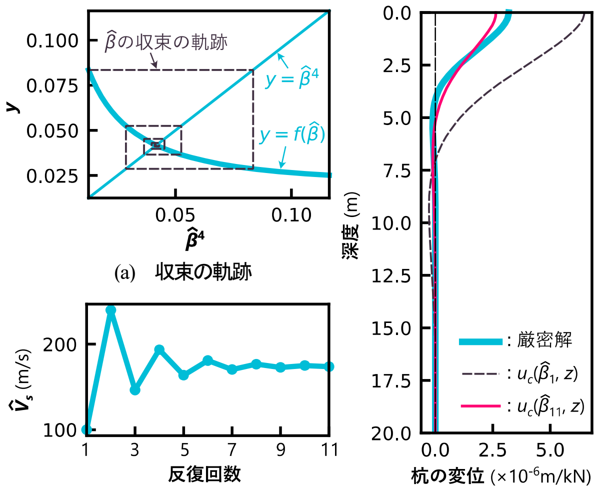


(a)　収束の軌跡

(b)　平均的 V_s の収束状況

(c)　杭の変位の比較

図６　ケース２ 杭頭自由条件計算結果



(a)　収束の軌跡

(b)　平均的 V_s の収束状況

(c)　杭の変位の比較

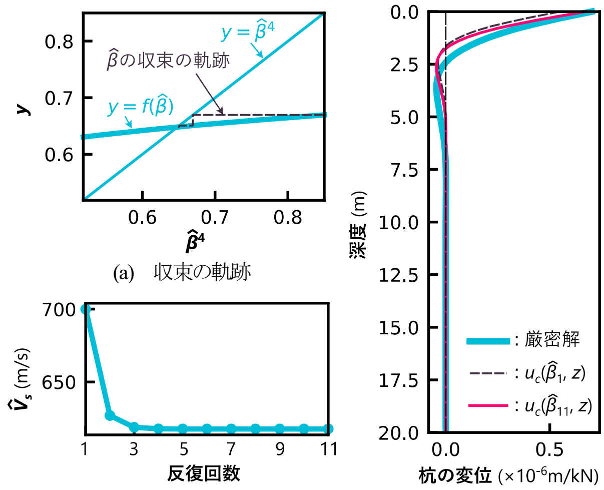
図７　ケース２ 杭頭固定条件計算結果

(3) 模擬地盤ケース３

ケース３は図２(b)のような収束パターンの現れる地盤条件の典型例として設定している．表層地盤改良の改良体を杭が貫通するような条件である．表４が地盤の諸元，図８が杭頭自由条件の結果，図９が杭頭固定条件の結果である．図８，９(a)より，このような地盤条件では図２(b)の収束パターンが現れることが確認できる．この収束パターンでは，図２(a)やケース１，２のような収束パターンと異なり収束の過程で$\hat{\beta}$の値が振動しないため，収束性が良い傾向があり，この場合には反復回数３～４回程度で値が収束している（図８，９(b)より）．ただ，収束性は良いものの，変位に関しては厳密解との乖離が大きい傾向があり（図８，９(c)より），この点には注意が必要だと考えられる．

表４　ケース３の地盤諸元

層番号	下端深度 (m)	V_{si} (m/s)	ν_i
1	1	700	0.30
2	3	150	0.48
3	5	300	0.48
4	無限	500	0.48

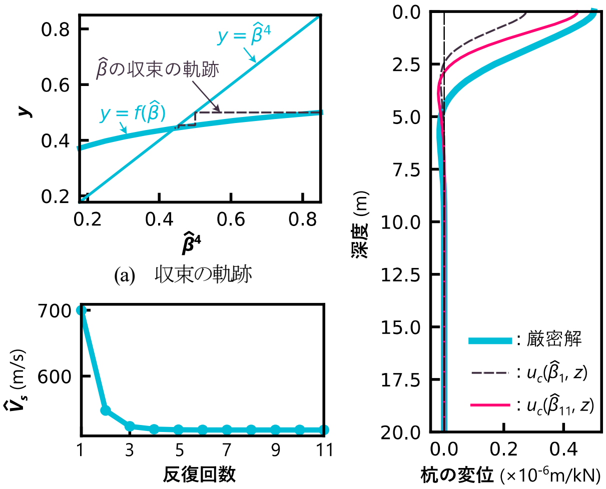


(a)　収束の軌跡

(b)　平均的 V_s の収束状況

(c)　杭の変位の比較

図８　ケース３ 杭頭自由条件計算結果



(a)　収束の軌跡

(b)　平均的 V_s の収束状況

(c)　杭の変位の比較

図９　ケース３ 杭頭固定条件計算結果

4. まとめ

多層地盤における Chang の式の適用性を拡張するため，等価一様地盤の概念を提案し，杭全長での弾性エネルギーの収支の釣合い条件から，等価一様βとその数値計算法を定式化した．また等価一様βの計算とそれを用いた Chang の式の解の数値的検証も行った．その結果，以下の知見を得た．

1) 提案した反復計算法により等価一様βを得ることができる．
2) 標準的な地盤条件では，等価一様βによる Chang の式の解と多層地盤の梁ばねモデルの厳密解は概ね整合する．ただし，等価一様βの「等価」は，あくまで杭全長でのエネルギー的な釣合いが満足されるという意味での「等価」であり，厳密解との整合性が担保されているわけでは無い．厳密解との整合が悪い条件もあるので注意が必要である．

今後は変位だけでなく断面力についても検証を進めるとともに，多層地盤における杭と地盤の相互作用解析に等価一様地盤の概念を応用できないか検討を進めたい．

参考文献

1) Y. L. Chang, Discussion on “Lateral pile-loading test” by Feagin, Trans., ASCE, p. 272-278, 1937
2) 日本建築学会　「建築基礎構造設計指針」，日本建築学会, p.259-262, 2019.11
3) A. J. Francis, “Analysis of pile groups with flexural resistance”, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 90, Issue 3, p. 1-32, 1964.3, doi:10.1061/JSFEAQ.0002133
4) M. F. Randolf and C. P. Wroth, “Analysis of deformation of vertically loaded piles”, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol. 104, Issue 12, p. 1465-1488, 1978.12, doi: 10.1061/AJGEB6.0000729
5) 地盤工学会　「杭基礎の設計法とその解説」，地盤工学会, p. 538-540, 1985.12
6) F. Kuwabara, “Settlement behaviour of non-linear soil around single piles subjected to vertical loads”, SOILS AND FOUNDATIONS, Vol. 31, No. 1, pp. 39-46, 1991.1, doi: 10.3208/sandf1972.31.39

付録 1. 鉛直載荷に対する平均的な地盤反力係数

鉛直方向の平均的な地盤反力係数を求める方法は，弾性論的な簡易法としては，Randolf の方法[4)] 以外には見当たらない．しかしながら，Randolf の方法は杭が剛体として近似できることを仮定しており，この仮定は，地盤反力に対して杭の軸剛性が相対的に低い場合には成り立たない．これを確かめるためには，杭の軸変形の度合いを計算すれば良い．

杭の軸変形の指標として，杭頭変位u_tと杭先端変位u_bの比（r_pとおく）を考える．この比r_pが 1 に近ければ近いほど，杭が剛体に近いと言える．鉛直載荷に対する梁ばねモデルの解[例えば 5)] より，r_pは次式で表されるので，杭が剛である条件は，$\mathrm{e}^{\beta_v l} = \mathrm{e}^{-\beta_v l} = 1$である．

$$r_p \coloneqq \frac{u_t}{u_b} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\beta_v l} + \mathrm{e}^{-\beta_v l}\right) + \frac{k_b}{2EA\beta_v}\left(\mathrm{e}^{\beta_v l} - \mathrm{e}^{-\beta_v l}\right) \quad \text{(a1)}$$

ここに，Aは杭の断面積，k_bは杭先端の地盤ばね，β_vは鉛直載荷に対する梁ばねモデルの特性値であり杭の鉛直地盤反力係数をk_vとおくと$\beta_v \coloneqq \sqrt{k_v B/EA}$である．

Randolf の方法により定まるβ_vを用いて$\mathrm{e}^{\beta_v l}$を計算し，その結果が 1 に十分近い場合には，そのまま Randolf の方法が使えるが，そうでない場合には，Randolf の方法の前提となる仮定が破綻しているので別の方法を用いた方が良いと考えられる．

多層地盤における Randolf の方法の代替として最も単純なアイデアは，オリジナルの Randolf の方法による地盤反力係数の計算（次式）を，

$$k_v B = \frac{2\pi G_e}{\log\left(\frac{2r_m}{B}\right)} \quad \text{(a2)}$$

$$r_m \coloneqq 2.5l(1-\nu_e) \quad \text{(a3)}$$

ここに，G_eは地盤の平均的なせん断弾性係数，ν_eは地盤の平均的なポアソン比，lは杭長を表す．

次のように各層の値に書き換えて多層の梁ばねモデルの計算を実施することであるが，このような計算法の適用性を検討した例は見当たらない．この適用性検討については，今後の課題である（一様地盤については，境界要素法を用いた精算解との比較により，杭の軸剛性が比較的低い場合にも Randolf の方法により実用的な精度の解が得られることが検証されている（Kuwabara[6)] による）が，多層地盤で Randolf の方法の適用性を検証した例は見当たらない）．

$$k_{vi} B = \frac{2\pi G_i}{\log\left(\frac{2r_{mi}}{B}\right)} \quad \text{(a3)}$$

$$r_{mi} \coloneqq 2.5l(1-\nu_i) \quad \text{(a4)}$$

ここに，s_{vi}はi層の鉛直地盤反力係数を表す．

なお，(a3), (a4)式の計算方法を採用した上で，Chang の式の等価一様βを求めるのと同様の考え方により，等価一様β_vを求めることも出来るが，以下３点の理由により，多層の梁ばねモデルの計算をそのまま実施する方が，等価一様地盤の計算よりもメリットが大きいと考えられる．

1) 等価一様β_vを求めてそれを用いるよりも，多層の計算の方が厳密な解が得られる．
2) 鉛直の場合は，杭頭荷重が杭先端まで伝わり易く，有限長杭の解を用いる必要があるため，水平の場合の Chang の式に比べると，一様地盤の解であっても式の形が複雑で計算が難しい．特に，等価一様β_vを求めようとすると，煩雑な計算が必要となる．
3) 鉛直の場合は，梁ばねモデルの力の釣合いを表す微分方程式の階数が低く，水平の場合よりも解くのが簡単なので，多層の計算も比較的容易である（水平の場合は 4 階の微分方程式なのに対し，鉛直では 2 階である）．

付録 2. 等価一様β（β^4=$f(\beta)$の解）の存在証明

本文図２より直感的にはほぼ明らかであるが，同図は典型的と考えられるパターンを示したものであり，本文図２だけでは，いかなる条件下でも必ず$\overline{\beta}$が存在するとは言えない．ここでは，いかなる条件下でも必ず$\overline{\beta}$が存在することを確かめる．まず$\beta = 0$において，$\beta^4 = 0$かつ$f(\beta = 0) = k_{hn}B_n/4EI_n$なので，次の関係が成り立つ．

$$\beta^4 < f(\beta) \qquad (\beta = 0) \quad \text{(a5)}$$

また$\beta \to \infty$では，$\beta^4 \to \infty$かつ$f(\beta \to \infty) = k_{h1}B_1/4EI_1$で，$\beta^4$が無限大に発散するのに対し$f(\beta)$は高々有限値なので，次の関係が成り立つ．

$$\beta^4 > f(\beta) \qquad (\beta \to \infty) \quad \text{(a6)}$$

(a5), (a6)式より，$\beta = 0$から$\beta \to \infty$の間のどこかで，β^4と$f(\beta)$の大小関係が入れ替わることが分かる．このことと，β^4と$f(\beta)$がともに

連続関数であることより，$\beta = 0$から$\beta \to \infty$の間のどこかに，かならず$f(\beta) = \beta^4$となるβ，つまり$\overline{\beta}$が存在することが分かる．

付録 3.　等価一様 β を求めるための反復計算の収束性証明

本文で示した反復計算法の収束性は，本文図２や本文３章の計算の結果からは明らかに思えるが，厳密な収束性の証明は図の印象ほど容易ではない．ここでは$f(\beta)$が単調増加関数である場合（本文図２(b)のパターン）と，単調減少関数である場合（本文図２(a)のパターン）の収束性の証明を示す．

なお，かなり極端な地盤条件を設定した検証計算のケース２，３でも$f(\beta)$は単調関数であったので，現実的な地盤条件で$f(\beta)$が単調関数にならないような条件は無いかもしれないが，もし$f(\beta)$が単調でなく本文で示した反復計算が上手く収束しない場合でも，$f(\beta) = \beta^4$の解が存在することは確かなので（付録２に示した解の存在証明は$f(\beta)$が単調か否かによらず成り立つ），２分法等の球根アルゴリズムにより，解を求めることは可能である．

付録 3. 1 $f(\beta)$が単調増加関数である場合の収束性証明

はじめに，本文の通りにβの初期値$\hat{\beta}_1$を設定したとき，反復の度に$\hat{\beta}$の値が小さくなることを示す．$f(\beta \to \infty) = k_{h1}B_1/EI_4 = \hat{\beta}_1^4$なので，$f(\beta)$が単調増加な場合は，任意の$\beta$について，$f(\beta) < \hat{\beta}_1^4$である．したがって，次式が成り立つ．

$$f(\hat{\beta}_1) = \hat{\beta}_2^4 < \hat{\beta}_1^4 \tag{a7}$$

このとき$f(\beta)$が単調増加であるので，次式が成り立つ．

$$f(\hat{\beta}_2) < f(\hat{\beta}_1) \tag{a8}$$

$f(\hat{\beta}_j) = \hat{\beta}_{j+1}^4$なので，(a8)式より次式も成り立つ．

$$\hat{\beta}_3^4 < \hat{\beta}_2^4 \tag{a9}$$

同様の手順を繰り返すことにより，任意の反復回数の$\hat{\beta}_j$について次式が成り立つことが分かる．

$$\hat{\beta}_{j+1}^4 < \hat{\beta}_j^4 \tag{a9}$$

次に，任意の反復回数の$\hat{\beta}_j$について$\overline{\beta} < \hat{\beta}_j$であることを示す．まず，単調増加関数$f(\beta)$に対して，常に$f(\beta) < \hat{\beta}_1^4$がなりたっているので，$f(\beta)$と$\beta^4$の交点である$\overline{\beta}$と$\hat{\beta}_1$の大小関係は次の通りになる．

$$\overline{\beta} < \hat{\beta}_1 \tag{a10}$$

このとき，$f(\beta)$が単調増加なので，次式の関係も成り立つ．

$$f(\overline{\beta}) < f(\hat{\beta}_1) \tag{a11}$$

(a11)式において，$\overline{\beta}$の定義より$f(\overline{\beta}) = \overline{\beta}^4$，$\hat{\beta}$の更新ルールより$f(\hat{\beta}_1) = \hat{\beta}_2^4$であるので，これを代入すれば次式の通りになる．

$$\overline{\beta}^4 < \hat{\beta}_2^4 \tag{a12}$$

(a12)式より，$\overline{\beta} < \hat{\beta}_2$である．同様の手順を繰り返せば，任意の反復回数の$\hat{\beta}_j$について次式が成り立つことが分かる．

$$\overline{\beta} < \hat{\beta}_j \tag{a13}$$

(a9)式と(a13)式の組み合わせより，「$\hat{\beta}_j$は，$\overline{\beta}$よりも大きい値の範囲で，反復の度に常に減少する」ということが言える．つまり$\hat{\beta}_j$は，反復の度に$\overline{\beta}$に近づき，最終的に$\overline{\beta}$に収束することが分かる．

付録 3. 2 $f(\beta)$が単調減少関数である場合の収束性証明

はじめに，$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$の大小関係を確認する．$f(\beta \to \infty) = k_{h1}B_1/EI_4 = \hat{\beta}_1^4$なので，$f(\beta)$が単調減少な場合は，任意の$\beta$について，$f(\beta) > \hat{\beta}_1^4$である．したがって，次式が成り立つ．

$$\hat{\beta}_1^4 < f(\hat{\beta}_1) = \hat{\beta}_2^4 \tag{a14}$$

このとき$f(\beta)$が単調減少であるので，次式が成り立つ．

$$f(\hat{\beta}_1) > f(\hat{\beta}_2) \tag{a15}$$

よって次式も成り立つ．

$$\hat{\beta}_2^4 > \hat{\beta}_3^4 \tag{a16}$$

一方，任意のβにおいて$\hat{\beta}_1 < f(\beta)$であることより，次式が成り立つ．

$$\hat{\beta}_1^4 < f(\hat{\beta}_2) = \hat{\beta}_3^4 \tag{a17}$$

(a16), (a17)式より，次の関係が成り立つことが分かる．

$$\hat{\beta}_1^4 < \hat{\beta}_3^4 < \hat{\beta}_2^4 \tag{a18}$$

次に，(a18)式の関係を用いて，任意の反復回数の$\hat{\beta}_j$について$\hat{\beta}_{j-1} < \hat{\beta}_{j+1} < \hat{\beta}_j$もしくは$\hat{\beta}_j < \hat{\beta}_{j+1} < \hat{\beta}_{j-1}$であることを示す．まず，(a18)式と$f(\beta)$が単調減少であることより，次式が成り立つ．

$$f(\hat{\beta}_1) > f(\hat{\beta}_3) > f(\hat{\beta}_2) \tag{a19}$$

よって次式も成り立つ．

$$\hat{\beta}_2^4 > \hat{\beta}_4^4 > \hat{\beta}_3^4 \tag{a20}$$

同様の手順を繰り返すことで，任意の反復回数の$\hat{\beta}_j$について次式が成り立つことが導ける．

$$\begin{cases} \hat{\beta}_{j-1} < \hat{\beta}_{j+1} < \hat{\beta}_j & (j\text{が偶数}) \\ \hat{\beta}_{j-1} > \hat{\beta}_{j+1} > \hat{\beta}_j & (j\text{が奇数}) \end{cases} \tag{a21}$$

(a21)式は，「$\hat{\beta}_j$は，反復計算によって振動するが，その振幅は反復の度に小さくなる」ということを表してる．つまり(a21)式より，$\hat{\beta}_j$が収束することが分かる．$\hat{\beta}_j$が収束するということは，十分に大きいjにおいて$\hat{\beta}_{j+1}^4 = f(\hat{\beta}_j) \simeq \hat{\beta}_j^4$となることを意味しているので，$\overline{\beta}$の定義より，十分に大きい$j$において$\hat{\beta}_j$は$\overline{\beta}$の近似値をとるということが言える．